

11. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$, $n = 6$

Z definice:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x^2} \\ f''(x) &= e^{x^2}(2 + 4x^2) \\ f'''(x) &= e^{x^2}(12x + 8x^3) \\ f^{(4)}(x) &= e^{x^2}(48x^2 + 16x^4 + 12) \\ f^{(5)}(x) &= e^{x^2}(48x^3 + 32x^5 + 24x + 48x^3 + 48x + 64x^3 + 48x) \\ f^{(6)}(x) &= e^{x^2}(2x(48x^3 + 32x^5 + 24x + 48x^3 + 48x + 64x^3 + 48x) + \\ &\quad + 3 \cdot 48x^2 + 5 \cdot 32x^4 + 24 + 48 \cdot 3x^2 + 48 + 64 \cdot 3x^2 + 48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 2 \\ f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(0) &= 12 \\ f^{(5)}(0) &= 0 \\ f^{(6)}(0) &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_6^{f,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{6!}f^{(6)}(0)x^6 = \\ &= 1 + x^2 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{120}{6!}x^6 + o(x^6) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \end{aligned}$$

Lepší způsob:

Podívejme se nejdříve na rozvoj funkce e^x : $T_6^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$, tedy platí, že $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$, $x \rightarrow 0$. **V případě, že vyšetřujeme funkce v bodě 0, budeme ono $x \rightarrow 0$ vynechávat.**

Platí, že existuje nějaká funkce w taková, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{w(x)}{x^6} = 0$ a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + w(x)$. Dosadíme za x výraz x^2 . Dostaneme

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{6!} + w(x^2).$$

Z Věty 9.5 plyne, že $w(x^2)$ je $o((x^2)^6) = o(x^{12})$. Dále z Věty 9.4(vi) plyne, že $w(x^2) = o(x^6)$. Z Věty 9.4(iii), (i) a (vi) plyne, že $\frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{6!} = o(x^6)$. Podobně dostáváme, že existuje funkce $q(x)$ taková, že $q(x) = o(x^6)$ a $q(x) = w(x^2) + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{6!}$.

Pak platí, že $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + q(x)$. Tedy z Věty 9.3 plyne, že $T_6^{f,0}(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$.

Nadále nebudeme tak pečlivě rozepisovat použití zmíněných vět a nebudeme používat pomocné funkce jako w, q .

Tedy namísto pomocné funkce budeme psát pouze $o(x^n)$ pro vhodné n . Jinými slovy: $o(x^n)$ reprezentuje funkci, která je malé o od x^n v bodě 0.

Příklad 1 (b) $f(x) = \sin(2x^2 + 3x)$, $a = 0$, $n = 5$

Z přednášky víme, že

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Dosaďme postupně do všech členů místo x výraz $2x^2 + 3x$.

$$(2x^2 + 3x)^3 = 8x^6 + 36x^5 + 54x^4 + 27x^3 = 36x^5 + 54x^4 + 27x^3 + o(x^5)$$

$$(2x^2 + 3x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2x^2)^{5-k} (3x)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^{5-k} \cdot 3^k x^{10-k} = 3^5 x^5 + o(x^5)$$

Proveďme dosazení.

$$\begin{aligned} \sin(2x^2 + 3x) &= 2x^2 + 3x - \frac{(2x^2 + 3x)^3}{6} + \frac{(2x^2 + 3x)^5}{120} + o(x^5) = \\ &= 2x^2 + 3x - \frac{1}{6}(36x^5 + 54x^4 + 27x^3) + \frac{3^5 x^5}{120} + o((2x^2 + 3x)^5) = \\ &= 3x + 2x^2 - 6x^5 - 9x^4 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{3^4}{40}x^5 + o(x^5) = \\ &= 3x + 2x^2 - \frac{9}{2}x^3 - 9x^4 - \frac{159}{40}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Z Věty 9.3 plyne, že $T_6^{f,0}(x) = 3x + 2x^2 - \frac{9}{2}x^3 - 9x^4 - \frac{159}{40}x^5$

Příklad 1 (f) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$, $a = 0$, $n = 3$

Předpokládejme, že $T_3^{f,0}(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. Pak platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{\cos 3x} &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3) \\ \sin 2x &= (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)) \cos 3x \end{aligned}$$

Proveďme nyní rozklad funkcí $\sin 2x$ a $\cos 3x$.

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\ \cos 3x &= 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + o(x^3) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

Dosaďme je do rovnice výše (všimněte si, že sčítance, které po roznásobení vycházejí jako x o mocnině vyšší, jak 4 „spadly“ do $o(x^3)$):

$$\begin{aligned} 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) &= (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)) \left(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)\right) \\ 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) &= A - \frac{9}{2}Ax^2 + Bx - \frac{9}{2}Bx^3 + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3) \\ o(x^3) &= A + (B - 2)x \left(C - \frac{9}{2}A\right)x^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{9}{2}B + D\right)x^3 \end{aligned}$$

Dle Lemmatu 9.1 je polynom v poslední rovnici nulový. Tedy:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 2 \\ C &= \frac{9}{2}A = 0 \\ D &= \frac{9}{2}B - \frac{4}{3} = 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } T_3^{f,0}(x) = 2x + \frac{23}{3}x^3 + o(x^3).$$

Příklad 1 (g) $f(x) = \cos(\sin x)$, $a = 0$, $n = 5$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$. Chceme sem dosadit $\sin x$. Rozmysleme si nejdříve malé o . Po dosazení $\sin x$ nám tam vznikne dle Věty 9.5 $o(\sin^5 x)$. Dále víme, že platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Z Věty 9.4(iv) pak plyne, že tam můžeme místo $o(\sin^5 x)$ psát pouze $o(x^5)$.

Nyní se podívejme na rozvoj $\sin x$ a dosaďme jej do částí rozvoje $\cos x$.

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^2 = \\ &= x^2 + 2x \cdot \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \\ \sin^4 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^4 = \\ &= x^4 + 4x^3 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) + 6x^2 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^2 + \\ &\quad + 4x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^3 + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^4 + o(x^5) = \\ &= x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

Dosaďme do rozvoje fce $\cos x$:

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + o(x^5)) + o(x^5) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \end{aligned}$$

Příklad 3 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{\sin^3 x} \stackrel{(\P)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\sin^3 x) - \frac{x^3}{6}}{\sin^3 x} \stackrel{\text{VoAL, def. malého } o, \text{ ZL}}{=} 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

($\P$): Dle Věty 9.4(iv) pro funkci, která je $o(x^3)$, platí, že je i $o(\sin^3 x)$.

Příklad 3 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6 \sin x} + \frac{o(x^3)}{x \sin x} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x \sin x} \stackrel{(\star)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x \cdot \sin x)}{x \cdot \sin x} = 0\end{aligned}$$

($\star$): Dle Věty 9.4 lze psát $o(x^2)$ a pak použijeme téže větu a fakt, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} = 1$, tedy můžeme psát $(x \sin x)$.

Příklad 3 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

Využijeme Taylorovy rozvoje - do takového stupně, ve kterém se nám bude něco lišit, resp. nám tam nezbude pouze malé o , pravděpodobně se nám bude hodit $o(x^3)$, neb x^3 je v zadané limitě ve jmenovateli.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + o(x^3)}{x^3} \stackrel{\text{VoAL} + \text{def. malého } o}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Příklad 3 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{x - \sin x}$

Dá se ukázat, že $\text{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x + o(x^3)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) \frac{1}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} + \text{def. malého } o}{=} 2 \cdot (1 + 0) \frac{1}{1 + 0} = 2\end{aligned}$$

Příklad 3 (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\text{tg } x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

Odmocniny rozložíme do Taylorova polynomu řádu 3 (ve jmenovateli v limitě je $\sin^3 x$, tedy náš tip je, že by byl 3. řád vhodný... Navíc sinus a tangens se ve třetím řádu již liší). Nejdříve si připomeňme rozklad $(1+x)^\alpha$. Tam se využívá $\binom{\alpha}{k}$. Spočtěme si nejdříve $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{0} &= 1 \quad \text{dle definice} \\ \binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2} \\ \binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 + 1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2} = -\frac{1}{8} \\ \binom{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 3 + 1\right)}{3!} = \frac{\frac{-1}{4} \cdot \frac{-3}{2}}{6} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Platí, že

$$\sqrt{1+x} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Chceme najít rozvoj $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ a $\sqrt{1+\sin x}$. Připomeňme si proto nejdříve rozvoje fčí tg a $\sin$ v 0.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\operatorname{tg} x} &= 1 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{8} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ \sqrt{1+\sin x} &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \end{aligned}$$

Nyní počítejme zadanou limitu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{16} + o(x^3)}{\sin^3 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right)}{\sin^3 x} \stackrel{\text{ZL}}{=} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Příklad 4 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$

Chceme určit n tak, aby zadaná limita vyšla nenulová. Potřebujeme tedy najít takové n , pro které rozdíl Taylorových polynomů fčí $\operatorname{tg}(\sin x)$ a $\sin(\operatorname{tg} x)$ vyjde nenulový.

Lze snadno ukázat (tedy nebudeme to rozepisovat zde, nicméně se to spočte podobně jako 1 (f)), že

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

Dále víme, že

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k-1})$$

Spočtěme rozvoje $\operatorname{tg}(\sin x)$, $\sin(\operatorname{tg} x)$ 3. řádu. S ohledem na pisatele vzorového řešení zde uvedeme jen výpočty pro $\operatorname{tg}(\sin x)$, pro funkci $\sin(\operatorname{tg} x)$ se postupuje velmi podobně.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sin x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} \right)^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3} \left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} + 3x \frac{x^6}{6^2} - \frac{x^9}{6^3} \right) + o(x^3) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Analogicky spočteme, že

$$\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Vidíme, že nám vyšel tentýž výraz, tedy je potřeba zkusit vyšší řád, tedy pátý (vidíme, že sinus i tangens mají jen liché mocniny, tedy uvažovat 4. řád nemá smysl, neb by nám vyšlo totéž).

Při výpočtu vyššího řádu mějme na paměti, že již známe začátek Taylorova rozvoje - tedy nás nebudou zajímat členy x, x^3 (tj., nebudeme dopočítávat konkrétní čísla u věcí, které vyjdou ax, ax^3).

Do $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ budeme dosazovat $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Označme $A(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. Máme

$$\operatorname{tg}(\sin x) = A(x) + \frac{A(x)^3}{3} + \frac{2}{15}A(x)^5 + o(x^5).$$

Zjistíme nejdříve koeficienty u x^5 v $A(x), A(x)^3, A(x)^5$. To, co nás nebude zajímat, budeme značit symbolem ■.

$$\begin{aligned} A(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \blacksquare + \frac{1}{120}x^5 \\ A(x)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^{3-j} = \sum_{j=2}^3 \binom{3}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^{3-j} + o(x^5) = \\ &= \binom{3}{2} x^2 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \binom{3}{3} x^3 + o(x^5) = -\frac{x^5}{2} + \blacksquare + o(x^5) \\ A(x)^5 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5 = \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^{5-j} = \sum_{j=4}^5 \binom{5}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^{5-j} + o(x^5) = \\ &= \binom{5}{4} x^4 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \binom{5}{5} x^5 + o(x^5) = x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Ve polynomu $A(x) + \frac{A(x)^3}{3} + \frac{2}{15}A(x)^5$ má tedy člen x^5 koeficient:

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{2}{15} \cdot 1 = -\frac{1}{40}.$$

Dostáváme tedy, že

$$\operatorname{tg}(\sin x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5).$$

Analogicky nám vyjde, že $\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5)$.

Spočteme stejným způsobem rozvoj do 7. řádu - tedy stačí nám zjistit koeficient u x^7 . Označme $B(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}$ (začátek rozvoje $\sin x$ v 0). Připomeňme, že $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$. Pak

$$\operatorname{tg}(\sin x) = B(x) + \frac{B(x)^3}{3} + \frac{2}{15}B(x)^5 + \frac{17}{315}B(x)^7 + o(x^7).$$

Opět spočteme koeficienty x^7 ve výrazech $B(x), B(x)^3, B(x)^5, B(x)^7$ a podobně jako dříve značme symbolem ■ výrazy, které nás nezajímají.

$$\begin{aligned}
B(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} = -\frac{x^7}{7!} + \blacksquare \\
B(x)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^3 = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{3-j} = \\
&= \sum_{j=1}^3 \binom{3}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{3-j} + o(x^7) = \\
&= \binom{3}{1} x \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^2 + \binom{3}{2} x^2 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right) + \binom{3}{3} x^3 + o(x^7) = \\
&= 3x \cdot \frac{x^6}{36} + x^2 \frac{3x^5}{120} + \blacksquare + o(x^7) = x^7 \left(\frac{3}{36} + \frac{1}{40}\right) + \blacksquare + o(x^7) = \frac{13}{120} x^7 + \blacksquare + o(x^7) \\
B(x)^5 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^5 = \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{5-j} \\
&= \sum_{j=3}^5 \binom{5}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{5-j} + o(x^7) = \\
&= \binom{5}{3} x^3 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^2 + \binom{5}{4} x^4 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right) + \binom{5}{5} x^5 + o(x^7) = \\
&= 5x^4 \cdot \frac{-x^3}{6} + \blacksquare + o(x^7) = -\frac{5}{6} x^7 + \blacksquare + o(x^7) \\
B(x)^7 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^7 = \sum_{j=0}^7 \binom{7}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{7-j} = \\
&= \sum_{j=5}^7 \binom{7}{j} x^j \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^{7-j} + o(x^7) = \\
&= \binom{7}{5} x^5 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right)^2 + \binom{7}{6} x^6 \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}\right) + \binom{7}{7} x^7 + o(x^7) = \\
&= x^7 + \blacksquare + o(x^7)
\end{aligned}$$

Dostáváme, že hledaný koeficient k x^7 v rozvoji $\operatorname{tg}(\sin x)$ je $-\frac{1}{7!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{120} + \frac{2}{15} \cdot \frac{-5}{6} + \frac{17}{315} \cdot 1 = \frac{-107}{5040}$.
Dostáváme:

$$\operatorname{tg}(\sin x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{107}{5040} x^7 + o(x^7).$$

Analogickým výpočtem zjistíme, že

$$\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{55}{1008} x^7 + o(x^7).$$

Lze si snadno rozmyslet, že zadaná limita je pak nenulová. Tedy došli jsme k výsledku: $n = 7$.